УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Г.А.АГАЕВА

Бакинский Государственный Университет

gulsumm_agayeva@mail.ru

В работе получены достаточные условия разрешимости в гильбертовом пространстве одной краевой задачи с оператором в краевом условии для эллиптического операторно-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом в конечном отрезке. Условия разрешимости краевой задачи выражены свойствами операторных коэффициентов краевой задачи.

Ключевые слова: гильбертово пространство, операторно-дифференциальное уравнение, краевая задача, самосопряженный оператор.

Пусть H - сеперабельное гильбертово пространство, A - положительно определенный самосопряженный оператор в H с областью ограничения $D(A)$. Обозначим через H_γ шпалу гильбертовых пространств, порожденную оператором A, т.е.

$$H_\gamma = D(A^\gamma),\ (x,y)_\gamma = (A_x^\gamma, A_y^\gamma),\quad x,y \in H_\gamma\,,\ \gamma \ge 0\,,\ H_0 = H\,.$$

Пусть $L_2((0,T):H)$ - гильбертово пространство всех вектор-функций $f(t)$ определенных в интервале $(0,T)$ почти всюду, со значениями в H, для которых

$$\| f \|_{L_2((0,T):H)} = \left(\int_0^T \| f(t) \|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty\,.$$

Введем гильбертово пространство [1]

$$W_2^2((0,T):H) = \{u : u'' L_2((0,T):H),\ A^2 u \in L_2((0,T):H)\}$$

с нормой

$$\| u \|_{W_2^2((0,T):H)} = \left(\|u''\|^2_{L_2((0,T):H)} + \|A^2 u\|^2_{L_2((0,T):H)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

При $R = (-\infty, \infty)$ пространства $L_2(R:H)$ и $W_2^2(R:H)$ определяются аналогично.

Введем следующее подпространство пространства $W_2^2((0,T):H)$:

$$W_2^2((0,T):H) = \{u : u \in W_2^2((0,T):H), u(0) = Su(0),\ \ u(T) = 0\},$$

где $S \in L(H_{1/2}, H_{3/2})$. $L(X,Y)$ есть пространство линейных ограниченных операторов действующих из пространства X в пространство Y.

Здесь и в дальнейшем, производные понимаются в смысле теории распределений [1].

Рассмотрим в пространстве H краевую задачу

$$-u''(t) + \rho(t)A^2u(t) + A_1u'(t) + A_2u(t) = f(t),\quad t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(0) = Su'(0), \tag{2}$$

где $u(t), f(t)$ вектор-функции определенные в $(0,T)$ почти всюду со значениями в H, а операторные коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) A положительно-определенный самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$;
2) $\rho(t) = \begin{cases} \alpha^2,\ t \in (0,t_0), \\ \\ \beta^2,\ t \in (t_0,T),\ t_0 \in (),T),\ \alpha > 0,\ \beta > 0; \end{cases}$
3) $B_j = A_j A^{-j}$ - ограниченные операторы в H, $j = 1,2$;
4) $S \in L(H_{1/2}, H_{3/2})$.

Определение 1. Если при $f(t) \in L_2((0,T):H)$ существует вектор-функция $u(t) \in W_2^2((0,T):H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в интервале $(0,T)$, то $u(t)$ будем называть регулярным решением уравнения (1).

Определение 2. Если при любом $f(t) \in L_2((0,T):H)$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнение (1), удовлетворяющие граничным условиям (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t\to+0}\|u(t) - Su'(t)\|_{3/2} = 0,\quad \lim_{t\to T-0}\|u(t)\|_{3/2} = 0$$

и имеет место оценка

$$\| u \|_{W_2^2((0,T):H)} \le const \| f \|_{L_2((0,T):H)},$$

то задача (1), (2) называется регулярно разрешима.

В данной работе мы укажем достаточные условия на коэффициенты краевой задачи, которые обеспечивают регулярно разрешимости задачи

(1),(2). Отметим, что краевые задачи для уравнений второго порядка исследованы, например, в работах [2-6].

Обозначим через

$P_0u = -u'' + A^2u$, $P_1u = A_1u' + A_2u$, $Pu = P_0u + P_1u$, $u \in W^2_{2,S}((0,T):H)$.

Очевидно, что при выполнении условий 1)-4) операторы P_0, P_1 и P непрерывные операторы, действующие из пространства $W^2_{2,s}((0,T):H)$ в $L_2((0,T):H)$.

Сперва исследуем разрешимость уравнения $P_0u = f$.

Имеет место следующая

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1), 2), 4) и $\operatorname{Re} AS \ge 0$ и $H_{1/2}$. Тогда при любом $u \in W^2_2((0,T):H)$ имеет место неравенство

$$\|Au'\|^2_{L_2((0,T):H)} + \|\rho^{1/2}A^2u\|^2_{L_2((0,T):H)} \le \|P_0u\|_{L_2((0,T):H)}\|A^2u\|_{L_2((0,T):H)}. \tag{3}$$

Доказательство. Умножая уравнение $P_0u = f$ скалярно на функцию A^2u в пространстве $L_2((0,T):H)$ и интегрируя по частям, получаем

$$\operatorname{Re}(P_0u, A^2u)_{L_2((0,T):H)} = -\operatorname{Re}(u'', A^2u)_{L_2((0,T):H)} + (\rho A^2u, A^2u)_{L_2((0,T):H)} =$$

$$= \operatorname{Re}(A^{1/2}u'(0), A^{3/2}Su(0)) + \|Au'\|^2_{L_2((0,T):H)} + \|\rho^{1/2}A^2u\|^2_{L_2((0,T):H)} =$$

$$= \operatorname{Re}(AS\,u(0), u(0))_{1/2} + \|Au'\|^2_{L_2((0,T):H)} + \|\rho^{1/2}A^2u\|^2_{L_2((0,T):H)} \ge$$

$$\ge \|Au'\|^2_{L_2((0,T):H)} + \|\rho^{1/2}A^2u\|_{L_2((0,T):H)}.$$

Отсюда имеем:

$$\|Au'\|^2_{L_2((0,T):H)} + \|\rho^{1/2}A^2u\|_{L_2((0,T):H)} \le \operatorname{Re}(P_0u, A^2u)_{L_2((0,T):H)} \le$$

$$\le \|P_0u\|_{L_2((0,T):H)} \le \|A^2u\|_{L_2((0,T):H)}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. При выполнении условия леммы для любого $u \in W^2_2((0,T):H)$ имеет место следующие неравенства

$$\|A^2u\|_{L_2((0,T):H)} \le \frac{1}{\min(\alpha^2, \beta^2)}\|P_0u\|_{L_2((0,T):H)}, \tag{4}$$

$$\|Au'\|_{L_2((0,T):H)} \le \frac{1}{2\min(\alpha, \beta)}\|P_0u\|_{L_2((0,T):H)}. \tag{5}$$

Доказательство. Из неравенства (3) выйдет, что

$$\|A^2u\|^2_{L_2((0,T):H)} = \|\rho^{-1/2}\rho^{1/2}A^2u\|^2_{L_2((0,T):H)} \le \max_t \rho^{-1}(t) \cdot \|\rho^{1/2}A^2u\|_{L_2((0,T):H)} \le$$

$$\leq \frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\left\|P_0 u\right\|_{L_2((0,T):H)} \cdot \left\|A^2 u\right\|_{L_2((0,T):H)}.$$

т.е.

$$\left\|A^2 u\right\|_{L_2((0,T):H)} \leq \frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\left\|P_0 u\right\|_{L_2((0,T):H)}.$$

Таким образом, неравенство (4) верно. Докажем неравенство (5).

Из доказательства леммы 1 следует, что

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2((0,T):H)} + \left\|\rho^{1/2}A^2 u\right\|_{L_2((0,T):H)} = \mathrm{Re}(P_0 u, A^2 u)_{L_2((0,T):H)} =$$

$$= RE(\rho^{-1/2}P_0 u, \rho^{1/2}A^2 u)_{L_2((0,T):H)} \leq \left\|\rho^{-1/2}A^2 u\right\|^2_{L_2((0,T):H)} \cdot \left\|\rho^{1/2}P_0 u\right\|^2_{L_2((0,T):H)}.$$

Применяя неравенство Юнга, при любом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2((0,T):H)} + \left\|\rho^{1/2}A^2 u\right\|_{L_2((0,T):H)} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}\left\|\rho^{1/2}A^2 u\right\|^2_{L_2((0,T):H)} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|\rho^{-1/2}P_0 u\right\|^2_{L_2((0,T):H)}.$$

Пологая $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2\varepsilon}$, т.е. $\varepsilon = 2$, получаем

$$\left\|Au'\right\|^2_{L_2((0,T):H)} \leq \left\|\rho^{-1/2}P_0 u\right\|^2 \leq \frac{1}{4}\,\frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\left\|P_0 u\right\|^2_{L_2((0,T):H)},$$

т.е.

$$\left\|Au'\right\|_{L_2((0,T):H)} \leq \frac{1}{2\min(\alpha,\beta)}\left\|P_0 u\right\|_{L_2((0,T):H)}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть выполняются условия лемма 1. Тогда оператор P_0 изоморфно отображает пространство $W^2_{2,s}((0,T):H)$ на $L_2((0,T):H)$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что уравнение $P_0 u = 0$ имеет только нулевое решение, т.е. $Ker P_0 = \{0\}$. Покажем, что уравнение $P_0 u = f$ имеет решение при любом $f \in L_2((0,T):H)$. Очевидно, что функция

$$\xi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2 E + \alpha^2 A^2)^{-1}\,\hat{f}_1(\xi)e^{i\xi t}d\xi, \quad t \in R$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2 E + A^2)^{-1}\,\hat{f}_1(\xi)e^{i\xi t}d\xi, \quad t \in R$$

где $\hat{f}_1(\xi)$ есть преобразование функции $f_1(t)$, где $f_1(t) = f(t)$, $t \in (0,T)$, $f_1(t) = 0$, $t \in R \setminus (0,T)$, принадлежат пространству $W_2^2(R,H)$ и удовлетворяют уравнениям $u'' + \alpha^2 A^2 u = f$ и $u'' + \beta^2 A^2 u = f$ и $(0,T)$ почти всюду. Тогда $\bar{\xi}_1(t), \bar{\xi}_2(t) \in W_2^2((0,T):H)$, где $\bar{\xi}_1(t), \bar{\xi}_2(t)$ есть сужения $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ на $[0,T]$ соответственно и будем искать решения уравнения $P_0 u = f$ в виде

$$u(t) = \begin{cases} \bar{\xi}_1(t) + e^{-\alpha A t}\varphi_1 + e^{\alpha(t-t_0)A}\varphi_2, \ t \in (0,t_0), \\ \bar{\xi}_2(t) + e^{\beta(t-T)}\varphi_3 + e^{\beta(t_0-T)}\varphi_4, \ t \in (t_0,T), \end{cases}$$

где векторы $\varphi_j \in H_{3/2}$ $(j = \overline{1,4})$ принадлежат к определению. Из условия (2) и $u(t_0 - 0) = u(t_0 + 0), u'(t_0 - 0) = u'(t_0 + 0)$ эти векторы определяются однозначно. Тогда $u(t) \in W_2^2((0,T):H)$ и $P_0 u = f$.

Далее из ограниченности P_0 следует утверждение теоремы

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)-4), $\operatorname{Re} AS \geq 0$ в $H_{1/2}$ и имеет место неравенство

$$q = \frac{1}{2\min(\alpha,\beta)}\|B_1\| + \frac{1}{\min(\alpha^2,\beta^2)}\|B_2\| < 1.$$

Тогда задача (1),(2) регулярно разрешима.

Доказательство. Напишем задачу (1), (2) в виде уравнения $Pu = P_0 u + P_1 u$. После замены $v = P_0 u$ и учитывая лемму 2, получаем, что при любом $v \in L_2((0,T):H)$ имеем

$$\left\|P_1 P_0^{-1} v\right\|_{L_2((0,T):H)} = \left\|P_1 u\right\|_{L_2((0,T):H)} \leq \|B_1\| \, \|Au'\|_{L_2((0,T):H)} +$$
$$+ \|B_2\| \, \|A^2 u\|_{L_2((0,T):H)} \leq q\|P_0 u\|_{L_2((0,T):H)} = q\|v\|_{L_2((0,T):H)}.$$

Так как $q < 1$, то $v = (E + P_1 P_0^{-1})^{-1} f$, а $u = P_0^{-1}(E + P_1 P_0^{-1})^{-1}$ и

$$\|u\|_{W_2^2((0,T):H)} \leq const\|f\|_{L_2((0,T):H)}.$$

Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность профессору С.С.Мирзоеву за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лионс Ж.-Л., Мадженс Э. Неоднородные граничные задачи и их применения. М.: Мир, 1971, 371 с.
2. Гасымов М.Г., Мирзоев С.С. О разрешимости краевых задач для операторно-дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка // Дифференц. уравнение, 1992, т.28, №4, с.652-651.
3. Мирзоев С.С., Алиев А.Р., Рустамова А.А. Об условиях разрешимости краевой задачи для эллиптического операторно-дифференциального уравнения с разрывным коэффициентом // Матем. заметки, 2012, в.92, №5, с.789-793.

4. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О разрешимости краевой задачи для уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве с операторным коэффициентом в краевой условии // Матем. заметки, 2012, т.91, №6, с.861-869.
5. Мирзоев С.С., Салимов М.Ю. О полноте элементарных решений одного класса операторно-дифференциальных уравнений второго порядка // Сибирский матем. журнал, 2010, т.51, №4, с.815-828.
6. Агаева Г.А. О разрешимости одной краевой задачи для операторно-дифференциальных уравнений второго порядка на конечном отрезке // Вестник Педагогического Университета, 2013, №3, с.26-

İKİNCİ TƏRTİB ELLİPTİK OPERATOR DİFERENSIAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN SƏRHƏD ŞƏRTİNDƏ OPERATOR ƏMSAL OLAN BİR SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL OLUNMASI HAQQINDA

Q.A.AĞAYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə, Hilbert fəzasında ikinci tərtib elliptik kəsilən əmsallı operator-diferensial tənliklər üçün sərhəd şərtində operator olan bir sinif sərhəd məsələnin həll olunma şərtləri tapılmışdır. Həll olunma şərtləri sərhəd məsələnə daxil olan operatorların xassələri vasitəsilə ifadə edilmişdir.

Açar sözlər: Hilbert fəzası, operator-diferensial tənlik, sərhəd məsələsi, öz-özünə qoşma operator.

ON THE SOLVABILITY OF ONE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR SECOND ORDER ELLIPTIC OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATION WITH OPERATOR ON THE BOUNDARY

G.A.AGHAYEVA

SUMMARY

In the paper, sufficient conditions for solvability of a boundary-value problem for second order elliptic operator-differential equation of discontinuous coefficient with operator on the boundary considered on the finite segment in Hilbert space are obtained.

Key words: Hilbert space, operator-differential equation, boundary value problem, self-adjoint operator.

Принято в редакцию: 01.12.2014 г.
Подписано к печати: 20.04.2015 г.